# 两类一致等时系统的中心条件和极限环分支*

桑　波
（聊城大学数学科学学院，山东 聊城 252059）

**摘　要：** 对于一类六次一致等时系统，给出原点为中心的充要条件，并证明从细焦点至多可分支出 3 个极限环；对于一类七次一致等时系统，给出原点为中心的充要条件，并证明从细焦点至多可分支出 4 个极限环。

**关键词：** 一致等时系统；约化焦点量；时间可逆性；极限环

**中图分类号：** O175. 12　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529 - 6579（2014）06 - 0146 - 05

# Center Conditions and Limit Cycle Bifurcations for Two Classes of Rigid Systems

SANG Bo
（School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China）

**Abstract:** For a class of six order rigid systems, the necessary and sufficient conditions for the origin to be center are given. And the maximal number of limit cycles bifurcating from the weak focus is proved to be 3. For a class of seven order rigid systems, the necessary and sufficient conditions for the origin to be center are given. And the maximal number of limit cycles bifurcating from the weak focus is proved to be 4.

**Key words:** rigid system; reduced focal values; time-reversibility; limit cycle

考虑 $n$ 次多项式微分系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \delta x - y + P_n(x,y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \delta y + Q_n(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\max(\deg(P_n),\deg(Q_n)) = n$ 。当 $\delta = 0$ 时，系统（1）以原点为中心或细焦点。如何区分称为中心焦点判定问题。

为了获得系统（1）具有中心的充要条件，首先需要计算系统的前面各阶非零焦点量并对它们进行零点分解，从而得到原点为中心的必要条件；然后利用首次积分、形式首次积分、积分因子或时间可逆性证明所得条件都是充分的。

近二十多年以来出现了很多焦点量算法，比如奇点量算法[1]、基于伪除的形式幂级数法[2]和摄动算法[3]。但当 $P_n, Q_n$ 为非齐次多项式时，系统（1）的焦点量非常复杂且难于约化，为此作者基于重新参数化法给出了焦点量的约化方法[4]。

从一个奇点分支出多个小振幅极限环的现象称为多重 Hopf 分支。设系统（1）以原点为 $M$ 阶细焦点，则对其进行适当的系数微扰，相应系统至多可分支出 $M$ 个小振幅极限环。至于实际扰动出多少个极限环，还需要作进一步的分析。

下面考虑 $n+1$ 次多项式微分系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \delta x - y + xR(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \delta y + yR(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $R(x,y) = \sum_{k=1}^{n} R_k(x,y)$ ，$R_k(x,y)$ 为 $k$ 次多项式。因为通过极坐标变换，系统 $(2)_{\delta=0}$ 可化为

* 收稿日期：2014 - 01 - 13
基金项目：数学天元基金资助项目（11226041）
作者简介：桑波（1976 年生），男；研究方向：常微分方程定性理论和符号计算；E-mail：sangbo_76@163. com

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=rR(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1\end{cases}\tag{3}$$

所以我们称系统 $(2)_{\delta=0}$ 为一致等时系统。

当 $R(x,y)$ 为齐次多项式时，Conti[5] 给出了系统 $(2)_{\delta=0}$ 以原点为中心的充要条件。当 $R(x,y)=\sum_{k=1}^{3}R_k(x,y)$ 时，Chavarriga 等[6] 给出了系统 $(2)_{\delta=0}$ 可积的充要条件。当

$R(x,y)=\sum_{k=1}^{4}R_k(x,y)$，$R_4\neq 0$ 且使 $R_i\neq 0$，$i=1,2,3$ 的下标 $i$ 只有一个时，Algaba 等[7] 给出系统 $(2)_{\delta=0}$ 以原点为中心的充要条件。对系统 (2) 多重 Hopf 分支的研究，见文献［8－9］。

考虑如下两类系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\delta x-y+x(R_1(x,y)+R_5(x,y))\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+\delta y+y(R_1(x,y)+R_5(x,y))\end{cases}\tag{4}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\delta x-y+x(R_1(x,y)+R_6(x,y))\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+\delta y+y(R_1(x,y)+R_6(x,y))\end{cases}\tag{5}$$

其中 $R_1(x,y)=a_0x+a_1y$，$R_j(x,y)=\sum_{k=0}^{j}b_kx^{j-k}y^k$，$j=5,6$。本文将分别给出系统 $(4)_{\delta=0}$ 和系统 $(5)_{\delta=0}$ 以原点为中心的充要条件。证明在原点附近系统 (4) 至多存在 3 个小振幅极限环，系统 (5) 至多存在 4 个小振幅极限环。

## 1　系统(4)的中心条件和多重 Hopf 分支

根据文［4］的计算方法，系统 $(4)_{\delta=0}$ 的前 5 阶约化焦点量（不计非零常数因子）分别为

$$W_1=W_2=0,\ W_3=\frac{32}{35}a_0b_1+\frac{32}{35}a_0b_3+\frac{32}{7}a_0b_5-\frac{32}{7}a_1b_0-\frac{32}{35}a_1b_2-\frac{32}{35}a_1b_4,$$

$$W_4=a_0^2a_1\left(-\frac{80}{63}b_2-\frac{320}{63}b_4+\frac{800}{63}b_0\right)+a_0a_1^2\left(\frac{80}{21}b_3+\frac{160}{21}b_1\right)+a_0^3\left(-\frac{80}{63}b_3-\frac{160}{63}b_1\right)+a_1^3\left(-\frac{80}{63}b_2-\frac{800}{63}b_0\right),$$

$$W_5=a_0^5\left(\frac{7\,424}{297}b_5+\frac{512}{297}b_3\right)-\frac{1\,280}{33}a_0a_1^2(2a_0^2-a_1^2)b_5+a_0^2a_1^3\left(\frac{2\,560}{297}b_2+\frac{2\,560}{99}b_4+\frac{10\,240}{297}b_0\right)+a_1^5\left(-\frac{512}{99}b_2-\frac{256}{33}b_4-\frac{2\,048}{99}b_0\right)+a_0^4a_1\left(-\frac{1\,792}{99}b_4-\frac{512}{99}b_2\right)$$

**定理 1**　系统 $(4)_{\delta=0}$ 以原点为中心的充要条件是下列 5 组条件之一成立

(i) $b_0=\dfrac{C_1}{8a_1^5(2a_0^2-a_1^2)}$，$b_1=\dfrac{C_2}{8a_1^4(2a_0^2-a_1^2)a_0}$，$b_3=\dfrac{-C_3}{2a_0a_1^2(2a_0^2-a_1^2)}$；

(ii) $a_1=b_1=b_3=b_5=0$；

(iii) $a_0=a_1=0$；

(iv) $a_0=b_0=b_2=b_4=0$；

(v) $a_0=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}a_1$，$b_1=\mp 3\sqrt{2}b_0\mp\frac{1}{2}\sqrt{2}b_4+\frac{9}{2}b_5$，$b_2=\pm\frac{5}{8}\sqrt{2}b_5+\frac{3}{4}b_4$，$b_3=\pm 8\sqrt{2}b_0\pm\frac{9}{4}\sqrt{2}b_4-\frac{33}{4}b_5$

其中

$$C_1=a_0^7b_5-a_0^6a_1b_4-13a_0^5a_1^2b_5+2a_0^4a_1^3b_2+9a_0^4a_1^3b_4+35a_0^3a_1^4b_5-4a_0^2a_1^5b_2-11a_0^2a_1^5b_4-15a_0a_1^6b_5+2a_1^7b_2+3a_1^7b_4,$$

$$C_2=5a_0^7b_5-5a_0^6a_1b_4-45a_0^5a_1^2b_5+10a_0^4a_1^3b_2+25a_0^4a_1^3b_4+55a_0^3a_1^4b_5-12a_0^2a_1^5b_2-15a_0^2a_1^5b_4-15a_0a_1^6b_5+2a_1^7b_2+3a_1^7b_4,$$

$$C_3=-5a_0^5b_5+5a_0^4a_1b_4+10a_0^3a_1^2b_5+2a_0^2a_1^3b_2-6a_0^2a_1^3b_4-5a_0a_1^4b_5+a_1^5b_4$$

**证明**（必要性）　通过求解多项式集 $G=\{W_3,W_4,W_5\}$，共得到定理中的 5 组独立系数条件，从而必要性得证。

（充分性）当条件 (i) 成立时，系统 $(4)_{\delta=0}$ 的向量场关于直线 $a_0x+a_1y=0$ 对称，因此由 Poincaré 对称原理，系统 $(4)_{\delta=0}$ 以原点为中心。

当条件 (ii) 成立时，系统 $(4)_{\delta=0}$ 的向量场关于 $y$ 轴对称，因此它以原点为中心。

当条件 (iii) 成立时，由文献［5］知系统 $(4)_{\delta=0}$ 以原点为中心。

当条件 (iv) 成立时，系统 $(4)_{\delta=0}$ 的向量场关于 $x$ 轴对称，因此它以原点为中心。

当条件 (v) 成立时，系统 $(4)_{\delta=0}$ 的向量场关于直线 $x\pm\sqrt{2}y=0$ 对称，因此它以原点为中心。证毕。

由系统 $(4)_{\delta=0}$ 的焦点量结构和定理 1 知，系统 (4) 在原点邻近至多存在 3 个小振幅极限环。以下构造由 5 阶细焦点扰动出 3 个小振幅极限环的实例。

**定理 2** 假设系统（4）满足

$$\delta = \frac{1\,990\,656}{104\,335}a_0^5\varepsilon^{10}, R_1(x,y) = a_0 x,$$

$$R_5(x,y)= b_0x^5 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{733\,468}{7\,317}a_0^4\varepsilon^4 - \frac{342\,608}{20\,325}a_0^2\varepsilon^2\right)\cdot x^4y + b_2x^3y^2 +$$

$$\left(-\frac{1\,466\,936}{7\,317}a_0^4\varepsilon^4 + \frac{522\,928}{20\,325}a_0^2\varepsilon^2 + 1\right)x^2y^3 + b_4xy^4 +$$

$$\left(-\frac{1}{10} + \frac{101\,168}{7\,317}a_0^4\varepsilon^4 - \frac{36\,064}{20\,325}a_0^2\varepsilon^2\right)y^5$$

其中 $a_0 \neq 0$，则当 $\varepsilon = 0$ 时，系统（4）以原点为 5 阶细焦点；当 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 时，在原点充分小邻域内系统（4）恰有 3 个小振幅极限环，其位置分别在圆 $x^2 + y^2 = k^2\varepsilon^2$ 附近，$k = 1,2,3$。

**证明** 当 $\varepsilon = 0$ 时，由条件及焦点量公式，我们得到 $\delta = W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = 0, W_5 = \frac{-128}{165}a_0^5$，所以系统（4）以原点为 5 阶细焦点。

当 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 时，系统（4）的第 0 阶至第 5 阶焦点量依此为

$$v_1(2\pi) = 1 + \frac{3\,981\,312}{104\,335}a_0^5\pi\varepsilon^{10} + o(\varepsilon^{10}),$$

$$v_3(2\pi) = v_5(2\pi) = 0,$$

$$v_7(2\pi) = -\frac{1\,618\,688}{28\,455}a_0^5\varepsilon^4\pi + o(\varepsilon^4),$$

$$v_9(2\pi) = \frac{82\,432}{4\,065}a_0^5\pi\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

$$v_{11}(2\pi) = -\frac{256}{165}a_0^5\pi + O(\varepsilon^2)$$

所以系统（4）在原点邻域的拟后继函数为

$$L(h,\varepsilon) = -\frac{256}{313\,005}\pi a_0^5 \cdot$$

$$(1\,296\varepsilon^4 + 1\,764\varepsilon^2h^2 + 1\,897h^4)\prod_{k=1}^{3}(h^2 - k^2\varepsilon^2)$$

从而由文［10］知，系统（4）在原点的充分小邻域内恰有 3 个小振幅极限环，其位置分别在圆 $x^2 + y^2 = k^2\varepsilon^2$ 附近，$k = 1,2,3$。

## 2 系统(5)的中心条件和多重 Hopf 分支

通过计算，系统 $(5)_{\delta=0}$ 的前 6 阶约化焦点量（不计非零常数因子）分别为

$$W_1 = W_2 = 0,$$

$$W_3 = \frac{8}{7}b_0 + \frac{8}{35}b_2 + \frac{8}{35}b_4 + \frac{8}{7}b_6,$$

$$W_4 = a_0a_1\left(-\frac{20}{7}b_3 - \frac{100}{21}b_5 - \frac{100}{21}b_1\right) + a_1^2\left(\frac{100}{7}b_0 + \frac{20}{21}b_4 + \frac{40}{21}b_2\right) + a_0^2\left(-\frac{100}{7}b_0 - \frac{40}{21}b_2 - \frac{20}{21}b_4\right),$$

$$W_5 = a_0a_1^3\left(\frac{320}{33}b_5 - \frac{320}{33}b_1\right) + a_0^3a_1\left(-\frac{320}{33}b_5 + \frac{320}{33}b_1\right) + a_0^2a_1^2\left(\frac{128}{11}b_4 + \frac{128}{11}b_2\right) + a_1^4\left(-\frac{64}{33}b_4 - \frac{64}{33}b_2\right) + a_0^4\left(-\frac{64}{33}b_4 - \frac{64}{33}b_2\right),$$

$$W_6 = a_0^5a_1\left(-\frac{11\,200}{429}b_5 + \frac{4\,480}{429}b_1\right) + \frac{2\,240}{429}a_0a_1^3(10a_0^2 - 3a_1^2)b_5 + a_0^2a_1^4\left(-\frac{2\,240}{143}b_2 - \frac{11\,200}{429}b_4 - \frac{11\,200}{143}b_0\right) + a_0^4a_1^2\left(\frac{11\,200}{429}b_2 + \frac{15\,680}{429}b_4 + \frac{11\,200}{143}b_0\right) + a_1^6\left(\frac{448}{143}b_2 + \frac{448}{143}b_4 + \frac{2\,240}{143}b_0\right) + a_0^6\left(-\frac{2\,240}{429}b_2 - \frac{2\,240}{429}b_4 - \frac{2\,240}{143}b_0\right)$$

**定理 3** 系统 $(5)_{\delta=0}$ 以原点为中心的充要条件是下列 7 组条件之一成立：

（i）$b_1 = \dfrac{C_1}{5a_0(a_0 - a_1)(a_1 + a_0)(a_0^2 - 3a_1^2)(3a_0^2 - a_1^2)a_1}$,

$$b_3 = \frac{C_2}{(3a_0^2 - a_1^2)(a_0^2 - 3a_1^2)a_0a_1},$$

$$b_5 = \frac{C_3}{5a_0(a_0 - a_1)(a_1 + a_0)(a_0^2 - 3a_1^2)(3a_0^2 - a_1^2)a_1},$$

$$b_6 = -b_0 - \frac{1}{5}b_2 - \frac{1}{5}b_4;$$

（ii）$a_0 = \pm a_1, b_1 = -b_5, b_2 = -b_4$,

$$b_3 = 0, b_6 = -b_0;$$

（iii）$a_0 = \pm\sqrt{3}a_1, b_1 = \mp\frac{2}{3}\sqrt{3}b_0 \mp \frac{2}{3}\sqrt{3}b_4 + b_5$,

$$b_2 = \frac{5}{2}b_0 + \frac{3}{2}b_4, b_3 = \mp\frac{10}{3}\sqrt{3}b_0 \pm \frac{2}{9}\sqrt{3}b_4 - \frac{10}{3}b_5,$$

$$b_6 = -\frac{3}{2}b_0 - \frac{1}{2}b_4;$$

（iv）$a_0 = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}a_1, b_1 = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}b_0 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}b_4 + b_5$,

$$b_2 = \frac{5}{2}b_0 + \frac{3}{2}b_4,$$

$$b_3 = \pm\frac{10}{3}\sqrt{3}b_0 \mp \frac{2}{9}\sqrt{3}b_4 - \frac{10}{3}b_5, b_6 = -\frac{3}{2}b_0 - \frac{1}{2}b_4;$$

（v）$a_0 = a_1 = 0, b_6 = -b_0 - \frac{1}{5}b_2 - \frac{1}{5}b_4$;

（vi）$a_0 = b_0 = b_2 = b_4 = b_6 = 0$;

（vii）$a_1 = b_0 = b_2 = b_4 = b_6 = 0$,

其中

$$C_1 = -15a_0^8b_0 + 90a_0^6a_1^2b_0 - 10a_0^6a_1^2b_2 - 150a_0^4a_1^4b_0 + 28a_0^4a_1^4b_2 + 8a_0^4a_1^4b_4 + 90a_0^2a_1^6b_0 - 10a_0^2a_1^6b_2 - 15a_1^8b_0,$$

$$C_2 = -5a_0^6b_0 - a_0^6b_2 + 15a_0^4a_1^2b_0 + 7a_0^4a_1^2b_2 - 4a_0^4a_1^2b_4 - 15a_0^2a_1^4b_0 - 7a_0^2a_1^4b_2 + 4a_0^2a_1^4b_4 + 5a_1^6b_0 + a_1^6b_2,$$

$$C_3 = -15a_0^8b_0 - 3a_0^8b_2 - 3a_0^8b_4 + 90a_0^6a_1^2b_0 + 18a_0^6a_1^2b_2 + 28a_0^6a_1^2b_4 - 150a_0^4a_1^4b_0 - 38a_0^4a_1^4b_2 - 58a_0^4a_1^4b_4 + 90a_0^2a_1^6b_0 + 18a_0^2a_1^6b_2 + 28a_0^2a_1^6b_4 - 15a_1^8b_0 - 3a_1^8b_2 - 3a_1^8b_4$$

**证明**（必要性）通过求解多项式集 $G = \{W_3, W_4, W_5, W_6\}$，共得到定理中的 7 组系数条件，从而必要性得证。

（充分性）当条件（i）成立时，系统 $(5)_{\delta=0}$ 的向量场关于直线 $a_0x + a_1y = 0$ 对称，因此由 Poincaré 对称原理，系统 $(5)_{\delta=0}$ 以原点为中心。

当条件（ii）成立时，系统 $(5)_{\delta=0}$ 的向量场关于直线 $x \pm y = 0$ 对称，因此它以原点为中心。

当条件（iii）成立时，系统 $(5)_{\delta=0}$ 的向量场关于直线 $3x \pm \sqrt{3}y = 0$ 对称，因此它以原点为中心。

当条件（iv）成立时，系统 $(5)_{\delta=0}$ 的向量场关于直线 $x \pm \sqrt{3}y = 0$ 对称，因此它以原点为中心。

当条件（v）成立时，由文献［5］知系统 $(5)_{\delta=0}$ 以原点为中心。

当条件（vi）成立时，系统 $(5)_{\delta=0}$ 的向量场关于 $x$ 轴对称，因此它以原点为中心。

当条件（vii）成立时，系统 $(5)_{\delta=0}$ 的向量场关于 $y$ 轴对称，因此它以原点为中心。证毕。

由系统 $(5)_{\delta=0}$ 的焦点量结构和定理 3 知，系统（5）在原点邻近至多存在 4 个小振幅极限环。以下构造由 6 阶细焦点扰动出 4 个小振幅极限环的实例。

**定理 4**　假设系统（5）满足

$$\delta = \frac{1\ 783\ 627\ 776}{4\ 604\ 171}a_0^6\varepsilon^{12}, R_1(x,y) = a_0x,$$

$$R_6(x,y) = \left(-\frac{1}{15} - \frac{168\ 070}{32\ 197}a_0^2\varepsilon^2\right)x^6 + b_1x^5y + \left(1 - \frac{43\ 448\ 496}{160\ 985}a_0^4\varepsilon^4 + \frac{2\ 016\ 840}{32\ 197}a_0^2\varepsilon^2\right)x^4y^2 + b_3x^3y^3 + \left(-1 + \frac{43\ 448\ 496}{160\ 985}a_0^4\varepsilon^4 - \frac{1\ 512\ 630}{32\ 197}a_0^2\varepsilon^2\right)x^2y^4 + b_5xy^5 + \left(\frac{1}{15} - \frac{51\ 987\ 040}{96\ 591}a_0^6\varepsilon^6 + \frac{67\ 228}{32\ 197}a_0^2\varepsilon^2\right)y^6$$

其中 $a_0 \neq 0$，当 $\varepsilon = 0$ 时，系统（5）以原点为 6 阶细焦点；当 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 时，在原点充分小邻域内系统（5）恰有 4 个小振幅极限环，其位置分别在圆 $x^2 + y^2 = k^2\varepsilon^2$ 附近，$k = 1, 2, 3, 4$。

**证明**　当 $\varepsilon = 0$ 时，由条件及焦点量公式，我们得到 $\delta = W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = W_5 = 0$，

$W_6 = \dfrac{448}{429}a_0^6 \neq 0$，所以系统（5）以原点为 6 阶细焦点。

当 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 时，系统（5）的第 0 阶至第 5 阶焦点量依此为

$$v_1(2\pi) = 1 + \frac{3\ 567\ 255\ 552}{4\ 604\ 171}a_0^6\pi\varepsilon^{12} + o(\varepsilon^{12})$$

$$v_3(2\pi) = v_5(2\pi) = 0$$

$$v_7(2\pi) = -\frac{118\ 827\ 520}{96\ 591}a_0^6\pi\varepsilon^6 + o(\varepsilon^6)$$

$$v_9(2\pi) = \frac{16\ 551\ 808}{32\ 197}a_0^6\pi\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)$$

$$v_{11}(2\pi) = -\frac{21\ 512\ 960}{354\ 167}a_0^6\pi\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

$$v_{13}(2\pi) = \frac{896}{429}a_0^6\pi + O(\varepsilon^2)$$

所以系统（5）在原点邻域的拟后继函数为

$$L(h,\varepsilon) = \frac{896}{13\ 812\ 513}\pi a_0^6 \left(20\ 736\varepsilon^4 + 29\ 520\varepsilon^2h^2 + 32\ 197h^4\right)\prod_{k=1}^{4}(h^2 - k^2\varepsilon^2)$$

从而由文［10］知，系统（5）在原点的充分小邻域内恰有 4 个小振幅极限环，其位置分别在圆 $x^2 + y^2 = k^2\varepsilon^2$ 附近，$k = 1, 2, 3, 4$。

## 参考文献：


［1］刘一戎，李继彬. 论复自治系统的奇点量［J］. 中国科学 A 辑：数学，1989，19(3)：245 − 255.

［2］WANG D M. Mechanical manipulation for a class of differential systems［J］. Journal of Symbolic Computation，1991，12(2)：233 − 254.

［3］YU P. Computation of normal forms via a perturbation technique［J］. Journal of Sound and Vibration，1998，211(1)：19 − 38.

［4］桑波，朱思铭. 一类微分系统的非退化中心问题［J］. 系统科学与数学，2013，33(5)：599 − 606.

［5］CONTI R. Centers of planar polynomial systems：A review［J］. Matematiche，1998，53(2)：207 − 240.

［6］CHAVARRIGA J，GARCíA I A，GINé J. On integrability of differential equations defined by the sum of homogeneous vector fields with degenerate infinity［J］. Int J Bifurcation and Chaos，2001，11(3)：711 − 722.


（下转第 154 页）

［11］ HERZALLAH M A E, MUSLIH S I, BALEANU D, et al. Hamilton-Jacobi and fractional like action with time scaling［J］. Nonlinear Dynamics, 2011, 66(4): 549 – 555.

［12］ FREDERICO G S F, TORRES D F M. Constants of motion for fractional action-like variational problems［J］. International Journal of Applied Mathematics, 2006, 19(1): 97 – 104.

［13］ FREDERICO G S F, TORRES D F M. Nonconservative Noether's theorem for fractional action-like variational problems with intrinsic and observer times［J］. International Journal of Ecological Economics and Statistics, 2007, 9(F07): 74 – 82.

［14］ ZHANG Y, ZHOU Y. Symmetries and conserved quantities for fractional action-like Pfaffian variational problems［J］. Nonlinear Dynamics, 2013, 73(1/2): 783 – 793.

［15］ 张毅. 相空间中类分数阶变分问题的 Noether 对称性与守恒量［J］. 中山大学学报: 自然科学版, 2013, 52(4): 45 – 50.

［16］ 龙梓轩, 张毅. 基于按正弦周期律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 定理［J］. 中山大学学报: 自然科学版, 2013, 52(5): 51 – 56.

［17］ LONG Z X, ZHANG Y. Noether's theorem for fractional variational problem from El-Nabulsi extended exponentially fractional integral in phase space［J］. Acta Mech, 2014, 225(1): 77 – 90.

［18］ LONG Z X, ZHANG Y. Fractional Noether theorem based on extended exponentially fractional integral［J］. Int J Theor Phys, 2014, 53(3): 841 – 855.

［19］ 丁金凤, 张毅. 基于 El-Nabulsi 动力学模型的 Birkhoff 力学［J］. 苏州科技学院学报: 自然科学版, 2014, 31(1): 24 – 28.

［20］ HOJMAN S, URRUTIA L E. On the inverse problem of the calculus of variations［J］. J Math Phys, 1981, 22(9): 1896 – 1903.

（上接第 149 页）

［7］ ALGABA A, REYES M, BRAVO A. Uniformly isochronous quintic planar vector fields［C］// Fiedler B Proceedings of the International Conference on Differential Equations, Vol 2. World Scientific Publishing, Berlin, Germany, 1999, 1415 – 1417.

［8］ GASULL A, PROHENS R, TORREGROSA J. Limit cycles for rigid cubic systems［J］. J Math Anal Appl, 2005, 303 (2): 391 – 404.

［9］ DIAS F S, MELLO L F. The center-focus problem and small amplititude limit cycles in rigid systems［J］. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A, 2012, 32 (5): 1627 – 1637.

［10］ 刘一戎, 李继彬. 平面向量场的若干经典问题［M］. 北京: 科学出版社, 2010.